

Instruktion

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren



Linearkombinationen von Vektoren

Beispiele:

1 Ermitteln Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann.

Ansatz: $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(I) \quad \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$(II) \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$(III) \quad \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 4$$

$$(I) \quad \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$(II) \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$(III) \quad \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 4$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(II)-(III)} \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar, d.h. der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ kann als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dargestellt werden

$$(III) \Rightarrow \lambda_3 = -1$$

$$(II) \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 2$$

$$(I) \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2 Prüfen Sie, ob es $t \in \mathbb{R}$ gibt, dass der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & -1 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ für $t \neq 1$ lässt sich der Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Definition:

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ heißen linear abhängig, wenn die Vektorgleichung $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ eine Lösung hat, bei der mindestens eine der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ verschieden von Null ist.

Besitzt diese Vektorgleichung nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, so heißen die Vektoren linear unabhängig.

Beispiele:

1 Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Das lineare Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung und die ist im Falle eines homogenen

Gleichungssystems immer $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig

2 Bestimmen Sie den Wert von $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig sind.}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & t & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & t-2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \end{array} \right)$$

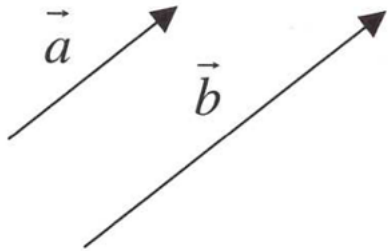
Das LGS hat für $t \neq 2$ eine eindeutige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig, wenn $t \neq 2$ gilt

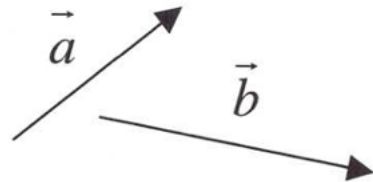
Geometrische Bedeutung der linearen Abhängigkeit

1. Lineare Abhängigkeit von zwei Vektoren:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.



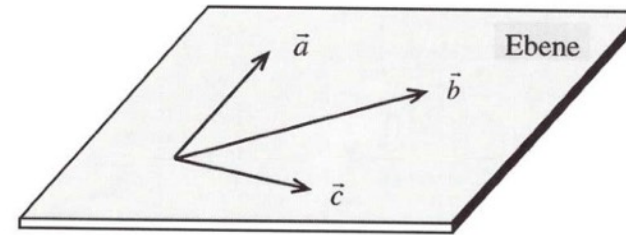
kollineare Vektoren



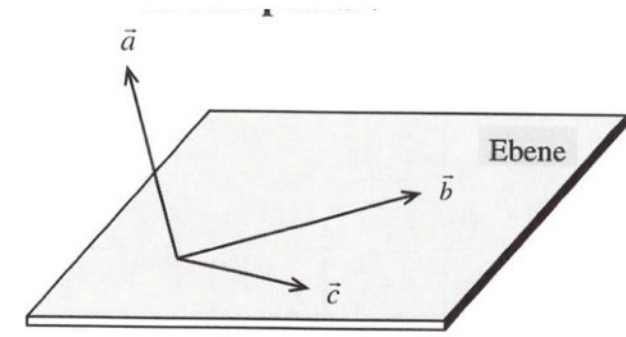
nicht kollineare Vektoren

2. Lineare Abhängigkeit von drei Vektoren:

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig, wenn sich ein Vektor als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt.



komplanare Vektoren



nicht komplanare Vektoren

Basis und Dimension eines Vektorraums

Definition:

Jede Menge linear unabhängiger Vektoren, aus denen sich jeder Vektor des Raumes $\mathbb{R}^3$ bzw. der Ebene $\mathbb{R}^2$ erzeugen lässt, bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$.

Folgerung:

Drei bzw. zwei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$.
Jeder weitere Vektor lässt sich dann als Linearkombination der Basisvektoren darstellen.

Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional, der Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ ist dreidimensional.

Die Anzahl der Vektoren einer Basis heißt Dimension.

Aufgaben:

1 Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ die Vektoren sind linear unabhängig $\Rightarrow$ die Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

2 Bestimmen Sie den Wert von $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ eine Basis des } \mathbb{R}^3 \text{ bilden.}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -k & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ die Vektoren bilden für alle $k \in \mathbb{R}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$

Koordinatendarstellung eines Vektors bzgl. einer Basis

Beispiel:

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \\
 \text{(II)} \\
 \text{(III)}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 2 \\
 0 & 1 & 1 & 3
 \end{array} \right) \rightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{(I)} \\
 \text{(II)} \\
 \text{(III)}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 3
 \end{array} \right) \rightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{(I)} \\
 \text{(II)} \\
 \text{(III)}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & -4
 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = 4 \\
 \text{(II)} \Rightarrow -\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = -1 \\
 \text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -2
 \end{array}
 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{a} - \vec{b} + 4 \cdot \vec{c}$$

$\Rightarrow$ die Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ bezüglich der Basis lauten $(-2|-1|4)$

Die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

(man nennt diese Basis auch die Standardbasis oder kanonische Basis).

$\Rightarrow$ die Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ bezüglich der Basis lauten $(1|2|3)$